

Семинар, 10.09.2016

Кинематика на плоскости.

1. Камень бросают под разными углами к горизонту с одинаковой скоростью. Пренебрегая ростом бросающего и сопротивлением воздуха, выяснить при каком угле броска камень летит на наибольшее расстояние (при условии, что опыт проводится на равнине).

Решение.

Пусть скорости по горизонтали и вертикали равны, соответственно v_x и v_y .

На прошлом семинаре мы получили, что время полёта камня определяется вертикальной составляющей скорости: $t = \frac{2v_y}{g}$. За это время камень по горизонтали пролетит расстоя-

ние $L = v_x \cdot t = \frac{2v_x v_y}{g}$. Учтём, что $v_x^2 + v_y^2 = v^2$, где v – скорость, с которой бросают камень

(постоянная). Возведём в квадрат уравнение для L и подставим $v_x^2 = v^2 - v_y^2$:

$$L^2 = \frac{4v_y^2(v^2 - v_x^2)}{g^2}.$$

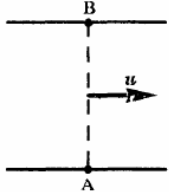
Заменим v_y^2 на x , а v^2 на C и рассмотрим функцию $f(x) = x(C - x) = Cx - x^2$. Эта функция – перевёрнутая парабола, пересекающая ось X в точках 0 и C ($f(0) = 0$ и $f(C) = 0$).

При этом парабола симметрична. Значит максимума эта функция достигает в точке $x = \frac{C}{2}$.

Возвращаясь к нашей задаче, получаем, что максимальная длина броска достигается, когда $v_y^2 = \frac{v^2}{2}$, то есть когда $v_y^2 = v_x^2$, или $v_x = v_y$.

Если мы теперь построим разложение вектора скорости по осям, мы увидим, что у нас получился равнобедренный треугольник, т.к. скорости по осям равны. Следовательно угол, при котором достигается максимальная длина броска, равен 45° .

На следующей листочке задачи для самостоятельного решения.

2. Дождевые капли падают вертикально. На боковом стекле автомобиля, едущего со скоростью $u = 30 \text{ км/ч}$ капли оставляют следы под углом $\alpha = 60^\circ$. С какой скоростью падают капли?
3. На лодке переплывают реку, отправляясь из пункта A . Скорость лодки в стоячей воде $v = 4 \text{ м/с}$, скорость течения реки $u = 1 \text{ м/с}$, ширина реки $s = 200 \text{ м}$. В какой точке пристанет лодка к противоположному берегу, если держать курс перпендикулярно берегам? Какой курс следует держать, чтобы попасть в точку B (см. рис.)? Для обоих случаев определите время переправы.
 
4. Автобус движется по прямому шоссе со скоростью v_1 . Человек может бежать с меньшей скоростью v_2 . Определите геометрическое место точек, в которых может находиться первоначально человек, чтобы успеть «перехватить» автобус.
5. С отвесного берега высотой h произведён выстрел в горизонтальном направлении. Начальная скорость пули равна v_0 . Определите модуль и направление скорости пули v при вхождении в воду.
6. Снаряд вылетает из дальнобойной пушки с начальной скоростью $v_0 = 1000 \text{ м/с}$ под углом $\alpha = 25^\circ$ к горизонту. Сколько времени t снаряд находится в воздухе? На какую высоту H поднимается? На каком расстоянии L от пушки он упадёт на землю? Считать, что атмосферы на Земле нет.